第17講　基本漸化式 ― Part Ⅰ ―

17　次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ.

(1)　$x_{n+1}=x_n+3$,　$x_1=1$

(2)　$y_{n+1}=2y_n$,　$y_1=3$

(3)　$z_{n+1}=z_n+2^n$,　$z_1=3$

(4)　$a_{n+1}=-2a_n+1$,　$a_1=1$

(5)　$a_{n+1}=2a_n+2n-4$,　$a_1=1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　基本漸化式 ― Part Ⅰ ―

17　次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ．

(1)　$a_{n+1}=a_n-2$，　$a_1=1$

(2)　$a_{n+1}=-2a_n$，　$a_1=2$

(3)　$a_{n+1}=a_n+2n$，　$a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$，　$a_1=1$

(5)　$a_{n+1}=3a_n+4n$，　$a_1=1$

【選択肢】

(1)　㋐　$a_n=2n-1$　　㋑　$a_n=-2n+1$　　㋒　$a_n=-2n+3$

(2)　㋐　$a_n=(-2)^{n-1}$　　㋑　$a_n=-(-2)^{n-1}+3$　　㋒　$a_n=-(-2)^n$

(3)　㋐　$a_n=n^2-n+1$　　㋑　$a_n=2n^2-n$　　㋒　$a_n=n^2-n$

(4)　㋐　$a_n=\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$　　㋑　$a_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　㋒　$a_n=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

(5)　㋐　$a_n=3^{n-1}-2n+2$　　㋑　$a_n=3^n-2n$　　㋒　$a_n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　基本漸化式 ― Part Ⅰ ―

17　次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ．

(1)　$x_{n+1}=x_n+3,\quad x_1=1$

(2)　$y_{n+1}=2y_n,\quad y_1=3$

(3)　$z_{n+1}=z_n+2^n,\quad z_1=3$

(4)　$a_{n+1}=-2a_n+1,\quad a_1=1$

(5)　$a_{n+1}=2a_n+2n-4,\quad a_1=1$

【答】 (1) $x_n=3n-2$　(2) $y_n=3\cdot2^{n-1}$　(3) $z_n=2^n+1$　(4) $a_n=\dfrac{1-(-2)^n}{3}$

(5) $a_n=2^{n-1}-2n+2$

【解答】

(1)　$x_{n+1}-x_n=3$ より，数列 $\{x_n\}$ は公差 3 の等差数列であるので

$$x_n=x_1+(n-1)\cdot3=1+3(n-1)\qquad \therefore\ \boldsymbol{x_n=3n-2}$$

(2)　$y_{n+1}=2y_n$ より，数列 $\{y_n\}$ は公比 2 の等比数列であるので

$$y_n=y_1\cdot2^{n-1}\qquad \therefore\ \boldsymbol{y_n=3\cdot2^{n-1}}$$

(3)　$z_{n+1}-z_n=2^n$ より，数列 $\{z_n\}$ の階差数列の一般項が 2^n であるので，$n\geqq2$ のとき

$$z_n=z_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=3+\frac{2^1(2^{n-1}-1)}{2-1}$$

$$=\boldsymbol{2^n+1}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ．

(4)　与式は　$a_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-2\left(a_n-\dfrac{1}{3}\right)$　と変形できるので

$$a_n-\frac{1}{3}=\left(a_1-\frac{1}{3}\right)\cdot(-2)^{n-1}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a_n=\frac{1-(-2)^n}{3}}$$

(5)　与式より　$a_{n+2}=2a_{n+1}+2(n+1)-4$　となるが，この式と与式の辺々の差をとると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+2$$

を得る．ここで $a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと，この式は

$$b_{n+1}=2b_n+2$$

$$b_{n+1}+2=2(b_n+2)$$

と変形できるので，これより　$b_n+2=(b_1+2)\cdot2^{n-1}$　を得る．

ここで，$a_2=2a_1+2-4=0$ より $b_1=a_2-a_1=-1$ となるので

$$b_n=2^{n-1}-2$$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k-1}-2)=1+\frac{2^{n-1}-1}{2-1}-2(n-1)$$

$$=\boldsymbol{2^{n-1}-2n+2}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　基本漸化式 ― Part Ⅰ ―

17　次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ．

(1)　$a_{n+1}=a_n-2,\quad a_1=1$

(2)　$a_{n+1}=-2a_n,\quad a_1=2$

(3)　$a_{n+1}=a_n+2n,\quad a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1,\quad a_1=1$

(5)　$a_{n+1}=3a_n+4n,\quad a_1=1$

【選択肢】

(1)　㋐　$a_n=2n-1$　㋑　$a_n=-2n+1$　㋒　$a_n=-2n+3$

(2)　㋐　$a_n=(-2)^{n-1}$　㋑　$a_n=-(-2)^{n-1}+3$　㋒　$a_n=-(-2)^n$

(3)　㋐　$a_n=n^2-n+1$　㋑　$a_n=2n^2-n$　㋒　$a_n=n^2-n$

(4)　㋐　$a_n=\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$　㋑　$a_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　㋒　$a_n=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

(5)　㋐　$a_n=3^{n-1}-2n+2$　㋑　$a_n=3^n-2n$　㋒　$a_n=4\cdot3^{n-1}-2n-1$

【答】　(1) ㋒　(2) ㋒　(3) ㋐　(4) ㋑　(5) ㋒

【解答】

(1)　$a_{n+1}-a_n=-2$ より，数列 $\{a_n\}$ は公差 -2 の等差数列であるので

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot(-2)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=-2n+3}$$

(2)　$a_{n+1}=-2a_n$ より，数列 $\{a_n\}$ は公比 -2 の等比数列であるので

$$a_n=a_1(-2)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=-(-2)^n}$$

(3)　$a_{n+1}-a_n=2n$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $2n$ であるので，

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k$$

$$=1+\frac{(n-1)\{2+2(n-1)\}}{2}$$

$$=\boldsymbol{n^2-n+1}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ．

(4)　与式は $a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$ と変形できるので

$$a_n-2=(a_1-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(5)　与式より　$a_{n+2}=3a_{n+1}+4(n+1)$　となるが，この式と与式の辺々の差をとると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+4$$

を得る．ここで $a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと，この式は

$$b_{n+1}=3b_n+4$$
$$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$$

と変形できるので，これより　$b_n+2=(b_1+2)\cdot 3^{n-1}$　を得る．

ここで，$a_2=3a_1+4=7$ より $b_1=a_2-a_1=6$ となるので

$$b_n=8\cdot 3^{n-1}-2$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(8\cdot 3^{k-1}-2) \\ &= 1+8\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}-2(n-1) \\ &= \mathbf{4\cdot 3^{n-1}-2n-1} \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。